



## A IDENTIFICAÇÃO DE UM SINAL EM AMBIENTE GNSS

José Nuno LIMA e João CASACA

*Núcleo de Geodesia Aplicada do Laboratório Nacional de Engenharia Civil*

**Resumo:** Esta comunicação apresenta um método para a reconstituição de um sinal transportado em observações GNSS, baseado num preditor linear cêntrico de variância mínima. O método, aplicado a um sinal com amplitude milimétrica, simulado sobre observações GNSS de elevada frequência (10Hz), permite reconstituir o sinal com razoável fidelidade, apesar de mascarado pelo ruído GNSS.

**Palavras-chave:** GNSS / predição / ruído / sinal / tendência

### 1. INTRODUÇÃO

A observação GNSS contínua tem vindo progressivamente a entrar na panóplia dos métodos usados na monitorização de deslocamentos de pontos notáveis de grandes obras de engenharia, tais como grandes barragens e pontes. A aplicação do GNSS à monitorização dos movimentos vibratórios de estruturas flexíveis sujeitas à acção do vento ou do tráfego parece ter um potencial elevado. Com efeito, a observação de uma base, em modo cinemático, permite medir os deslocamentos de um dos extremos (ponto objecto) em relação ao outro (ponto de referência) com frequências de amostragem muito elevadas (até 20Hz). Um dos obstáculos a ultrapassar, para medir os deslocamentos do ponto objecto com uma precisão de medição alta, é o ruído característico do GNSS (Lima *et al.*, 2009), que mascara a presença de sinais com amplitudes milimétricas.

Este trabalho apresenta um método para a predição de sinais com pequenas amplitudes, transportados nas observações GNSS de elevada frequência. O método, que consiste na construção de um preditor linear de variância mínima a partir de uma amostra restrita de observações, permite recuperar os sinais mascarados pelo ruído, e é ilustrado por um exemplo de aplicação: uma onda sinusoidal de pequena amplitude é imposta sobre observações GNSS a 10Hz de uma base estável com 325m localizada no LNEC.

### 2. A PREDIÇÃO DA TENDÊNCIA

Vamos admitir que as altitudes  $h(t)$  medidas com o GNSS podem ser decompostas numa soma:

$$h(t) = \mu(t) + e(t) \quad (01)$$

onde  $\mu(t)$  é uma função contínua e diferenciável, que designaremos por tendência, e  $e(t)$  é o ruído.

Admitamos que, a tendência (em geral, desconhecida ou parcialmente conhecida), pode ser aproximada com recurso a funções interpoladoras convencionais tais como polinómios e/ou somas de funções trigonométricas:

$$\mu(t) \approx \underbrace{\gamma + \beta t + \alpha t^2}_{\text{polinómio}} + a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \text{sen}(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \text{sen}(\omega_2 t) + \dots \quad (02)$$



Finalmente, admitamos que o ruído  $e(t)$  pode ser modelado por um processo estocástico (PE) isotrópico de segunda ordem com autocorrelação intrínseca exponencial (Wackernagel, 2003), isto é, tal que:

$$\begin{cases} \text{i) } E(e(t)) = 0, \\ \text{ii) } \text{Cov}(e(t + \Delta t), e(t)) = \varphi(\tau) \sigma^2 \quad (\tau = |\Delta t|) \\ \text{iii) } \text{Var}(e(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\text{Cov}(t + \Delta t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} (\varphi(\tau) \sigma^2) = \sigma^2 \end{cases} \quad (03)$$

onde a função  $\varphi(\tau)$ , que designaremos por escala da autocovariância, toma valores no intervalo  $[0, +1]$ , e é da forma:

$$\varphi(\tau) = \exp\left(-\frac{3\tau}{a}\right) \quad (04)$$

onde  $a$  é o alcance efectivo da escala (Casaca, 2006). A variância  $\sigma^2$  é designada por patamar. Quando o intervalo de tempo  $\tau$  se torna superior ao alcance efectivo ( $a$ ), a escala  $\varphi(\tau)$  torna-se inferior a 0.05: observações  $h(t)$  realizadas com intervalos de tempo superiores ao alcance efectivo têm uma autocovariância inferior a 5% do patamar ( $\sigma^2$ ).

### 3. O MELHOR PREDITOR LINEAR DE VARIÂNCIA MÍNIMA (BLUP)

Dada uma amostra de componentes altimétricas ( $h_1 = h(t_1), \dots, h_n = h(t_n)$ ), observadas com um espaçamento temporal constante ( $\tau_0 = t_{i+1} - t_i$ ), é possível usar uma sua combinação linear para prever a tendência do PE, numa dada época  $t$  (Casaca, 2007). O preditor linear da tendência:

$$\bar{h}(t) = \sum_{j=1}^n w_j h_j \quad (05)$$

tem um erro de predição dado por  $(\bar{h}(t) - \mu(t))$ . O preditor da tendência diz-se cêntrico se a esperança matemática do seu erro de predição for nula (Casaca, 2007):

$$E(\bar{h}(t) - \mu(t)) = 0 \Rightarrow \left( \sum_{j=1}^n w_j \mu(t_j) \right) - \mu(t) = 0 \quad (06)$$

A variância do erro de predição do preditor linear é dada por (Casaca, 2007):

$$\text{Var}(\bar{h}(t) - \mu(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \varphi(\tau_{ij}) \sigma^2 \quad (\tau_{ij} = t_i - t_j) \quad (07)$$

O melhor (de variância mínima) preditor linear cêntrico (BLUP – *best linear unbiased predictor*) da tendência é dado pelos pesos ( $w_1, \dots, w_n$ ) que verificam a condição (06) e minimizam (07).

### 4. A DETERMINAÇÃO DOS PESOS DO BLUP

A determinação dos pesos ( $w_1, \dots, w_n$ ) que minimizam a variância do erro de predição (7) e respeitam a condição de centricidade (6) é um problema de optimização, que pode ser resolvido pelo método dos multiplicadores de



Lagrange (Casaca, 2007). Substituindo a aproximação da tendência (2) na condição de centricidade (6), o Lagrangeano do problema de otimização pode ser expresso na forma:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \varphi(\tau_{ij}) \sigma^2 + \sum_{i=0}^m \lambda_i \phi_i(t) = \text{mínimo} \quad (08)$$

onde os  $\lambda_i$  são os multiplicadores de Lagrange e onde as as funções  $\phi_i(t)$  são da forma:

$$\phi_0(t) = 1, \quad \phi_1(t) = t, \quad \phi_2(t) = t^2, \quad \phi_3(t) = \cos(\omega_1 t), \quad \phi_4(t) = \text{sen}(\omega_1 t), \dots \quad (09)$$

Os pontos estacionários do Lagrangeano (pontos onde o seu gradiente é nulo) são as soluções do problema de otimização. Em forma matricial abreviada:

$$\begin{bmatrix} C & F \\ F^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} W \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & F \\ F^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_0(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde as submatrizes  $C(n,n)$  e  $F(n,m)$  são da forma:

$$C(n,n) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad F(n,m) = \begin{bmatrix} \phi_0(t_1) & \phi_1(t_1) & \dots & \phi_m(t_1) \\ \phi_0(t_2) & \phi_1(t_2) & \dots & \phi_m(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(t_n) & \phi_1(t_n) & \dots & \phi_m(t_n) \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde as componentes dos subvectores  $W$  (pesos do BLUP),  $\Lambda$  (multiplicadores de Lagrange) e  $F_0$  são:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \quad F_0 = \begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_m(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

## 5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para avaliar o desempenho da predição linear, foi sobreposto um sinal a um conjunto grande de observações do ruído da componente altimétrica GNSS, realizado com elevada frequência de amostragem (Figura 1). Para adquirir o ruído da componente altimétrica GNSS, foi usada uma sessão de observação, em modo cinemático, de uma base de teste, situada no LNEC. A base, com cerca de 325m, foi observada, com uma frequência de amostragem de 10Hz, durante três horas (Lima *et al.*, 2009).

A sessão de observação referida em Lima *et al.*, 2009 permitiu caracterizar a variabilidade da componente altimétrica do ruído GNSS com um desvio padrão cerca de 6mm e uma amplitude máxima cerca de 5cm. No entanto, a análise do periodograma correspondente permitiu verificar que as amplitudes das frequências superiores a 0.02Hz são muito pequenas (da ordem de 0.2mm), o que torna o GNSS sensível a essas frequências (Lima *et al.*, 2009).

Para simular o sinal, foram escolhidas duas frequências (0.5Hz e 1.0Hz) situadas na banda das frequências naturais da componente atirantada da Ponte Vasco da Gama. As cinco frequências naturais (*bending vertical* - BV), identificadas durante um ensaio de vibração ambiental, baseado na observação de seis sismógrafos triaxiais, situam-se na banda entre 0.3Hz e 1Hz (Cunha e Caetano, 2004).



O sinal simulado é a composição de uma onda sinusoidal com amplitude de 3mm e frequência de 0.5Hz e uma onda sinusoidal com amplitude de 5mm e frequência de 1Hz:

$$\phi(t) = a_1 \cos(0.5t) + b_1 \sin(0.5t) + a_2 \cos(t) + b_2 \sin(t) \quad (13)$$

que se encontra representada na Figura 3. Na Figura 1, apresenta-se a soma do sinal simulado com o ruído GNSS observado na base LNEC, com uma frequência de amostragem de 10Hz. A Figura 1 permite verificar que o sinal não se distingue no meio do ruído.

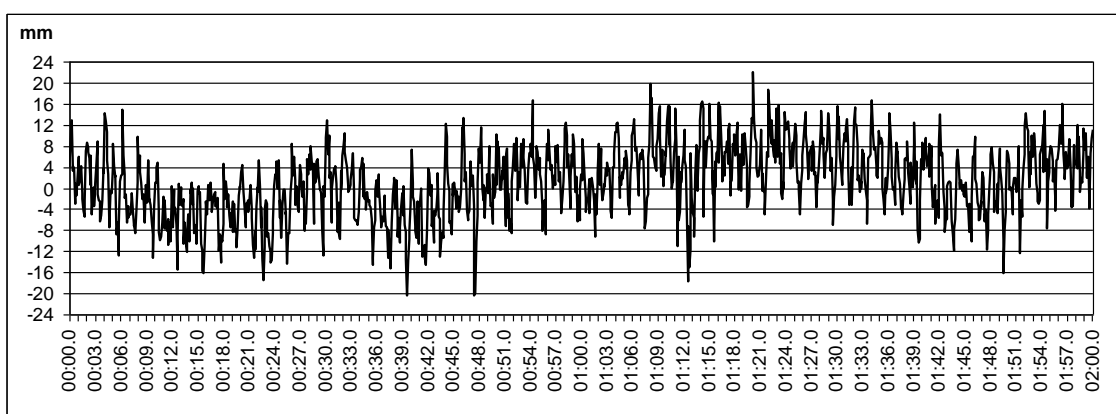


Figura 1 – Observação altimétrica GNSS (ruído) a 10Hz somada com um sinal simulado (frequência de 0.5Hz com amplitude de 3mm e frequência de 1Hz com amplitude de 5mm).

Na Figura 2, apresenta-se o periodograma (Casaca e Lima, 2008) correspondente à composição do sinal com o ruído GNSS. O periodograma assinala claramente as frequências do sinal 0.5Hz e 1Hz e o quadrado das amplitudes correspondentes, cerca de 9mm<sup>2</sup> e 25mm<sup>2</sup>, respectivamente. As pequenas amplitudes do ruído para as frequências superiores a 0.2Hz, *grosso modo*, permitem identificar inequivocamente o sinal no periodograma (Lima *et al.*, 2009).

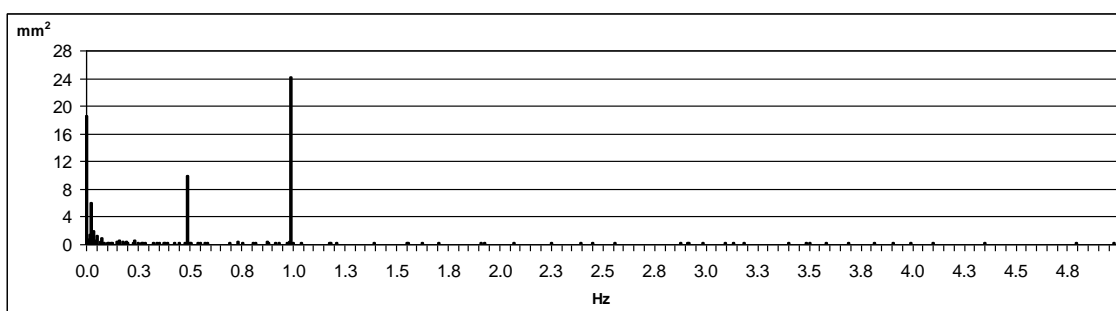


Figura 2 – Periodograma correspondente à observação altimétrica GNSS (ruído + sinal).

Para a predição linear, foi construído um BLUP dotado de uma autocovariância exponencial (04) com um alcance efectivo  $a = 1s$  e um patamar  $\sigma^2 = 8mm^2$ , baseado numa amostra altimétrica de tamanho  $n = 30$ , correspondente às posições altimétricas recolhidas durante um intervalo de 3s. Na Figura 3, apresentam-se, simultaneamente, o sinal simulado, a cinzento, a predição do sinal com o BLUP, a preto, e o erro de predição, dado pela diferença entre o sinal simulado e o sinal predito, a preto fino. A informação sobre o sinal fornecida ao BLUP consistiu apenas nas duas frequências (0.5Hz e 1.0Hz) indicadas pelo periodograma. A análise da Figura 3 permite



verificar que o erro de predição se encontra numa banda de  $\pm 2\text{mm}$ , o que é compatível com a variância ( $2.25\text{mm}^2$ ) estimada para o erro de predição (07), correspondente a um desvio padrão de 1.5mm.

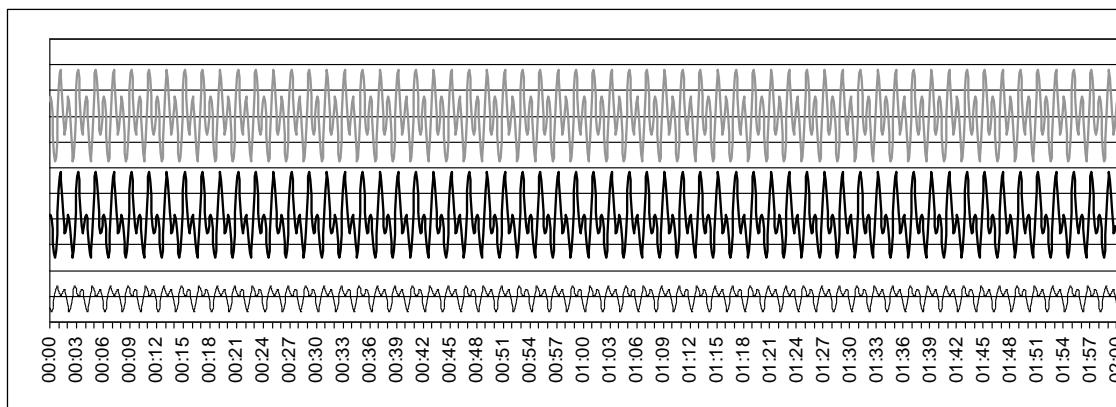


Figura 3 – Sinal simulado (cinzento), predição (BLUP) do sinal (preto), e erro de predição (preto fino). A unidade da escala vertical mede 4mm.

## 6. CONCLUSÕES

As observações GNSS de elevada frequência parecem, à primeira vista, ser capazes de monitorizar movimentos vibratórios de amplitude centimétrica (e frequência compatível). A utilização conjugada de ferramentas de análise espectral, como o periodograma, e de predição, como o BLUP, permitem, no entanto, ampliar a capacidade de monitorização do GNSS às amplitudes milimétricas.

O ensaio de simulação apresentado permitiu fazer uma avaliação positiva do desempenho do BLUP na reconstituição de um sinal, num ambiente GNSS com ruído. Uma próxima etapa deste estudo deverá consistir na identificação e predição de sinais com variação (decaimento) da amplitude.

### Referências

- Casaca, J. (2006). A Estimação da Autocovariância de Campos Vectoriais Aleatórios. LNEC: Série ICT, INCB11.
- Casaca, J. (2007). A Predição de Campos Vectoriais Aleatórios Isotrópicos. LNEC: Série ICT, INCB12.
- Casaca, J. and Lima, J. N. (2008). Spectral Characterization of GNSS Time Series. Actas da VI Assembleia Luso-Espanhola de Geodesia e Geofísica, Tomar.
- Cunha, A. e Caetano, E. (2004). Reanálise dos Ensaios Dinâmicos da Ponte Vasco da Gama com Base no Método de Identificação Estocástica por Subespaços. Actas do 6º Congresso Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica – SÍSMICA 2004.
- Lima, J. N., Casaca, J. e Henriques, M. J. (2009). O Ruído da Medição Relativa GNSS com Elevada Frequência de Amostragem. LNEC: Relatório 43/2009 do DBB/NGA.
- Wackernagel, H. (2003). Multivariate Geostatistics. Berlin: Springer Verlag.

### Contactos

José Nuno LIMA  
jnplima@lnec.pt  
Núcleo de Geodesia Aplicada – Laboratório Nacional de Engenharia Civil  
www.lnec.pt  
Portugal