



## O AJUSTAMENTO DE GRANDEZAS HETEROGÉNEAS PELO MÉTODO DAS COMPONENTES DE VARIÂNCIA

João CASACA<sup>1</sup>, Maria João HENRIQUES<sup>1</sup> e Pedro MATEUS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Núcleo de Geodesia Aplicada do Laboratório Nacional de Engenharia Civil

<sup>2</sup> Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

**Resumo:** Este trabalho apresenta o método das componentes de variância e a sua aplicação ao ajustamento das grandezas heterogéneas observadas nas redes de triangulação usadas na monitorização de deslocamentos horizontais em grandes barragens de betão. O método é ilustrado com o ajustamento de observações angulares realizadas na rede de triangulação de uma grande barragem.

**Palavras-chave:** componentes de variância / redundância / verosimilhança

### 1. INTRODUÇÃO

As redes de triangulação usadas na monitorização dos deslocamentos horizontais de pontos notáveis de grandes barragens de betão estão ligadas a um quadro de referência local, constituído por pontos cuja estabilidade é garantida por um perito em Geotecnia, e são observadas periodicamente, durante a vida útil das obras, em geral, ao longo de muitas dezenas de anos. As redes permitem medir directamente os deslocamentos dos pontos notáveis (pontos objecto) materializados nas barragens, com incertezas de medição que se pretendem submilimétricas. Na sua observação devem ser usados instrumentos de medição (teodolitos e distanciómetros electromagnéticos – DEM) da melhor qualidade disponível no mercado. Deve ser prestada a maior atenção aos erros sistemáticos, em particular, aos erros instrumentais (calibragem do equipamento) e aos erros ambientais, especialmente ao efeito nefasto da refração atmosférica nas observações angulares e lineares (Casaca, 2004).

No Núcleo de Geodesia Aplicada (NGA) do LNEC, os deslocamentos são um resultado directo do ajustamento das variações, entre duas épocas, das grandezas (angulares e lineares) observadas. Desde a década de 1950, várias gerações de programas de cálculo automático, destinados ao ajustamento das redes planimétricas, têm sido desenvolvidos no LNEC. Os programas desenvolvidos desde a década de 1980, têm abordado o problema do ajustamento de grandezas heterogéneas pelo método das componentes de variância (Casaca e Henriques, 1998). As grandezas dizem-se heterogéneas quer por serem de diferente natureza (angulares e lineares) quer por, sendo da mesma natureza, serem caracterizadas por diferentes incertezas de medição.

O objectivo deste trabalho é, precisamente, a apresentação do método das componentes de variância, designação usada para designar factores de proporcionalidade de blocos diagonais de uma matriz de variância que, sendo desconhecidos, se pretendem estimar. A apresentação é ilustrada com um exemplo de aplicação do método das componentes de variância ao ajustamento de variações angulares, entre duas épocas, observadas na rede de triangulação de uma grande barragem de betão.



## 2. O MODELO LINEAR COM COMPONENTES DE VARIÂNCIA

O modelo usado no ajustamento das grandezas heterogéneas tem uma componente funcional, que consiste numa relação linear:

$$A\theta = \mu \quad (01)$$

onde  $A(m,n)$  é a matriz da configuração de primeira ordem da rede, que resulta de uma Taylorização de primeira ordem das relações entre  $m$  grandezas observáveis (ângulos e distâncias) e o vector (desconhecido) dos deslocamentos dos vértices da rede  $\theta(n,1)$ , e onde  $\mu(m,1)$  é o vector das variações (exactas) das grandezas observáveis entre duas épocas (Casaca, 2001).

A componente estocástica do modelo consiste em encarar o vector  $Y(m,1)$  das variações observadas das grandezas como uma amostra de um vector aleatório normal cujo vector médio é  $\mu = A\theta$  (desconhecido) e cuja matriz de variância  $\Sigma(m,m)$ , designada por matriz da configuração de segunda ordem da rede, é parcialmente desconhecida, simbolicamente:

$$i) Y \in N(\mu, \Sigma), \quad ii) \mu = A\theta, \quad iii) \Sigma = \omega_1 Q_1 + \dots + \omega_p Q_p \quad (02)$$

onde os  $(p)$   $\omega_i$  são as componentes de variância desconhecidas e a matriz de variância  $\Sigma$  simétrica, definida positiva (sdp) é constituída por  $p$  blocos diagonais  $Q_{0i}(m_i, m_i)$  (sdp) que se relacionam com as  $p$  matrizes  $Q_i(m, m)$  (simétricas não negativas definidas – snnd) da relação (2.iii) por:

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{0i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, \dots, p) \quad (03)$$

Para o desenvolvimento do raciocínio torna-se necessário definir as matrizes sdp:

$$i) Q(m, m) = Q_1 + \dots + Q_p, \quad ii) P(m, m) = P_1 + \dots + P_p, \quad iii) P = Q^{-1} \quad (04)$$

onde as matrizes  $P_i$  são matrizes snnd, definidas por:

$$i) P_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{0i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ii) P_{0i} = Q_{0i}^{-1} \quad (i = 1, \dots, p) \quad (05)$$

## 3. A SOLUÇÃO DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA

De acordo com o modelo estocástico, dado um vector  $Y$  observado, a sua função de verosimilhança pode ser expressa em função do vector dos deslocamentos ( $\theta$ ) e das  $p$  componentes de variância por:

$$L(\theta, \omega_1, \dots, \omega_p | Y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \omega_1^{m_1} \dots \omega_p^{m_p} \det(Q)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{q_i}{\omega_i}\right) \quad (06)$$



onde:

$$q_i = (Y - A\theta)^T P_i (Y - A\theta) \quad (07)$$

A log-verosimilhança (logaritmo natural da verosimilhança) é:

$$\Lambda(\theta, \omega_1, \dots, \omega_p | Y) = -\frac{m}{2} \ln(2\pi) - \ln(\det(Q)) - \sum_{i=1}^p \frac{m_i}{2} \ln(\omega_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{q_i}{\omega_i} \quad (08)$$

Os deslocamentos e as componentes de variância que maximizam a verosimilhança são pontos estacionários da log-verosimilhança, isto é, os pontos onde as suas derivadas parciais em ordem aos deslocamentos e às componentes de variância se anulam:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{1}{\omega_i} \frac{\partial q_i}{\partial \theta} = \bar{0} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega_i} = \frac{q_i - m_i \omega_i}{2 \omega_i^2} = 0 \quad (i=1, \dots, p) \end{cases} \quad (09)$$

Os deslocamentos e as componentes de variância que verificam a condição (09), isto é, as soluções de máxima verosimilhança, são dados por:

$$\begin{cases} \bar{\theta} = (A^T R A)^{-1} A^T R Y \quad (R = \bar{\omega}_1^{-1} P_1 + \dots + \bar{\omega}_p^{-1} P_p) \\ \bar{\omega}_i = \frac{\bar{q}_i}{m_i} \quad (\bar{q}_i = (Y - A\bar{\theta})^T P_i (Y - A\bar{\theta})) \quad (i=1, \dots, p) \end{cases} \quad (10)$$

O sistema (10) deve ser resolvido iterativamente. Os valores iniciais:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{i0} = 1 \quad (i=1, \dots, p) \\ \bar{\theta}_0 = (A^T R_0 A)^{-1} A^T R_0 Y \quad (R_0 = P_1 + \dots + P_p) \end{cases} \quad (11)$$

substituídos em (10), dão origem à primeira iteração:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{i1} = \frac{\bar{q}_{i0}}{m_i} \quad (\bar{q}_{i0} = (Y - A\bar{\theta}_0)^T P_i (Y - A\bar{\theta}_0)) \quad (i=1, \dots, p) \\ \bar{\theta}_1 = (A^T R_1 A)^{-1} A^T R_1 Y \quad (R_1 = \bar{\omega}_{11}^{-1} P_1 + \dots + \bar{\omega}_{p1}^{-1} P_p) \end{cases} \quad (12)$$

O processo iterativo (12) deve ser repetido até à estabilização dos valores dos deslocamentos e das componentes de variância.

Infelizmente os estimadores de máxima verosimilhança (10) das componentes de variância não são cêntricos, isto é, a sua esperança matemática não coincide com a componente de variância (desconhecida) que pretendem estimar: na realidade são estimadores otimistas das componentes de variância, isto é, tendem a subestimar a variância.



Tendo em atenção as propriedades da esperança matemática de formas quadráticas (Rao e Kleffe, 1988), podem ser construídos estimadores cênicos, mas não de máxima verosimilhança, das componentes de variância, nomeadamente:

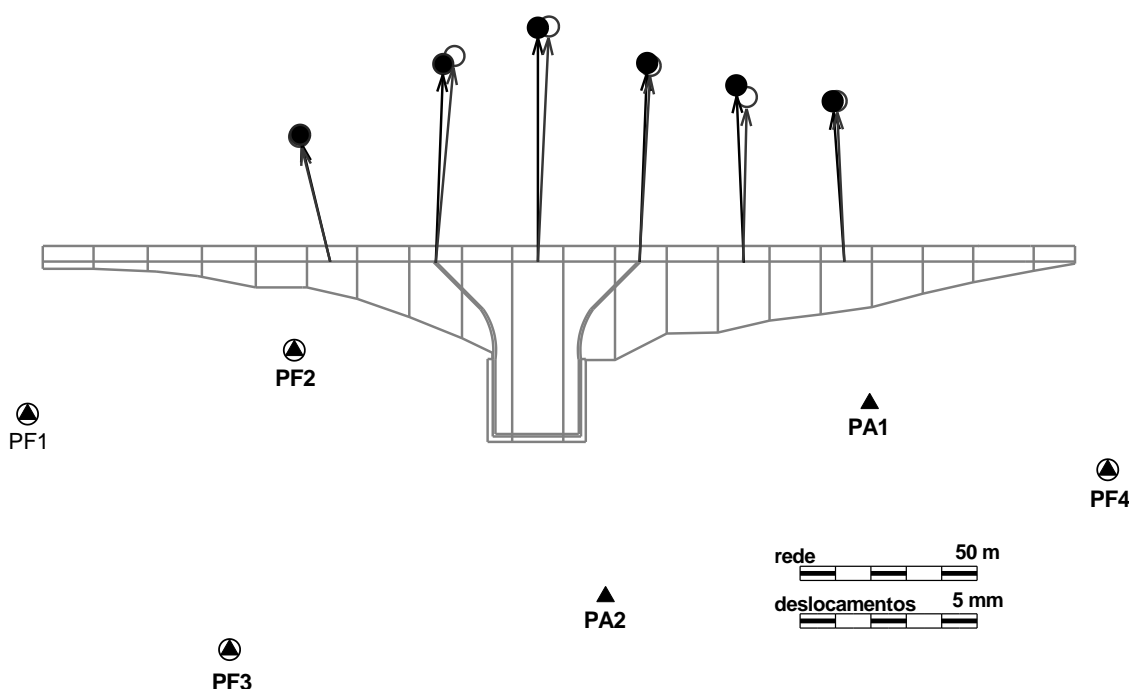
$$\tilde{\omega}_i = \frac{m_i}{t_i} \bar{\omega}_i \rightarrow E(\tilde{\omega}_i) = \omega_i \quad (13)$$

onde:

$$i) t_i = \text{tr}(P_i Q_i (I - U)), \quad ii) U = A(A^T R A)^{-1} A^T R \quad (14)$$

#### 4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como exemplo de aplicação, foi escolhida uma rede de triangulação instalada a jusante de uma grande barragem de betão do tipo gravidade, com cerca de 300m de desenvolvimento do coroamento e cerca de 40m de altura máxima (Figura 1). A rede é constituída por seis pilares de estacionamento nas margens a jusante e seis pontos objecto materializados por alvos de pontaria óptica chumbados no paramento de jusante. De acordo com uma avaliação geotécnica, os quatro pilares com a designação PF (Figura 1) têm sido considerados fixos e constituem o quadro de referência da rede.



**Figura 1** – Rede de triangulação para monitorização de deslocamentos horizontais. Deslocamentos horizontais iniciais (bola preta) e deslocamentos após uma iteração (bola branca)

De cada estação, são medidos quatro giros de horizonte, dois para as outras estações e os outros dois para os pontos objecto. As observações azimutais realizadas de algumas estações são, em condições atmosféricas desfavoráveis, significativamente afectadas por erros devidos à refração horizontal. Este facto é traduzido por valores mais elevados das estimativas das componentes de variância.



Para exemplificar o método das componentes de variância, foi realizado o ajustamento diferencial das observações realizadas em duas épocas de observação. O ajustamento foi realizado em dois passos, tomando uma matriz  $Q$  (4) construída com um desvio padrão angular de 3dmgon. No primeiro passo (11) foram adoptadas componentes unitárias e obtiveram-se os deslocamentos assinalados com uma bola preta na Figura 1. No segundo passo, as componentes foram calculadas com a relação (12) e obtiveram-se os deslocamentos assinalados com uma bola branca na Figura 1. Como facilmente se verifica na Figura 1, os deslocamentos pouco foram afectados pela iteração das componentes.

**Quadro 1** – Estimativas de máxima verosimilhança das componentes de variância dos giros

PF1		PF2		PF3		PF4		PA1		PA2	
EMV	EC	EMV	EC	EMV	EC	EMV	EC	EMV	EC	EMV	EC
0.6	0.6	4.0	4.3	2.3	2.4	0.8	0.8	0.8	0.9	5.1	5.9
4.3	4.4	5.2	5.7	1.0	1.1	2.4	2.6	1.0	1.1	4.5	5.2
0.5	0.6	0.6	1.0	0.4	0.5	0.6	0.7	0.4	0.7	1.2	1.9
0.9	1.0	0.5	0.8	0.5	0.5	0.4	0.5	0.9	1.4	1.2	1.9

No Quadro 1, apresentam-se as componentes de variância estimadas no ajustamento, para cada um dos giros de horizonte realizados. A terceira e a quarta linha do Quadro correspondem aos giros do sistema de apoio e a quinta e sexta linha correspondem aos giros que envolvem os pontos objecto. Na coluna EMV apresentam-se as estimativas de máxima verosimilhança (12) e, na coluna EC, as correspondentes estimativas cêntricas (13). A análise do Quadro 1 permite constatar a variabilidade das componentes de variância estimadas *a posteriori*, relativamente ao valor unitário arbitrado *a priori*. Alguns dos giros parecem particularmente afectados, pois apresentam componentes de variância com valores muito elevados: a variância estimada *a posteriori* é quatro ou cinco vezes superior ao valor da variância arbitrada *a priori*.

O desempenho do método das componentes de variância depende, no entanto, da redundância das grandezas observáveis. Esta redundância pode ser quantificada pelo quociente  $t_i/m_i$  (cf. relação 13) entre o traços  $t_i$  das submatrizes indicadas em (14) e o número de grandezas  $m_i$  dos blocos diagonais correspondentes. Quanto mais próximo da unidade for o quociente, maior é a redundância das grandezas envolvidas (Casaca, 2001).

**Quadro 2** – Redundância ( $t_i/m_i$ ) dos giros de horizonte

PF1	PF2	PF3	PF4	PA1	PA2
0.96	0.91	0.94	0.93	0.89	0.86
0.96	0.91	0.94	0.93	0.89	0.86
0.85	0.59	0.86	0.83	0.62	0.65
0.85	0.59	0.86	0.83	0.62	0.65

No Quadro 2, apresentam-se as redundâncias ( $t_i/m_i$ ) dos 24 giros de horizonte da rede de triangulação, onde a segunda e terceira linha correspondem aos giros do sistema de apoio e a quarta e quinta linha correspondem aos giros que envolvem os pontos objecto. São valores entre 0.59 e 0.96 razoavelmente homogêneos e elevados, que garantem uma redundância satisfatória à rede de triangulação (seria desejável que fossem mais homogêneos). A redundância das observações torna a rede robusta, isto é, distribui os erros pelos resíduos do ajustamento, evitando que afectem os deslocamentos (12).



## 5. CONCLUSÕES

O método das componentes de variância, apresentado neste trabalho, é um método recomendável para o ajustamento de grandezas heterogéneas, da mesma ou de diferente natureza, por fornecer estimativas de máxima verosimilhança num cenário de incerteza mais alargado do que o habitual.

Deve ter-se em atenção que, como já foi referido, o desempenho do método é condicionado pela redundância da rede. No exemplo apresentado, a redundância satisfatória da rede garante-lhe robustez, isto é, assegura que os erros de observação são atribuídos aos resíduos e às estimativas das componentes de variância e que, consequentemente, não vão afectar os deslocamentos.

### Referências

- Casaca, J. (2001). O Método da Variação de Coordenadas na Observação Geodésica de Barragens. Lisboa: LNEC, Série ICT, ITB21.
- Casaca, J. (2004). A Refracção Atmosférica em Geodesia Aplicada. Lisboa: LNEC, Série ICT, INCB9.
- Casaca, J. and Henriques, M. J. (1998). Variance Component Estimation and Reliability at Local Heterogeneous Networks. Proc. of the IAG Int. Symp. on Integrated Geodesy, Sopron. Hungarian Academy of Sciences, Vol. 2: 147-159.
- Rao, C. R. and Kleffe, J. (1988). Estimation of Variance Components and Applications. Amsterdam: North-Holland.

### Contactos

João CASACA  
jmmcasaca@gmail.com  
Laboratório Nacional de Engenharia Civil – Núcleo de Geodesia Aplicada  
www.lnec.pt  
Portugal